Теормин:

Длинная линия – это два параллельно идущих длинных провода.
Нижний провод мы всегда считаем заземлённым в каждой точке.
В 99% задачах мы считаем, что их удельное сопротивление ноль. Тогда может показаться, что все точки верхнего провода имеют один потенциал. Это не так: из-за того, что провода рядом, они взаимодействуют, там возникает э/м индукция и т.п.
В результате в верхнем проводе идёт волна. Скажем, если слева у нас источник синусоидального напряжения (что происходит в 99% задач), то на самом деле по верхнему проводу будет течь волна. Её скорость определяется геометрическими параметрами цепи.
Итак, типичная задача на длинную линию начинается так: вот два провода, и слева мы к ней подключаем генератор синусоидального напряжения.
Тогда по верхнему проводу потечёт синусоидальная волна: $U(x,t)=U_0\cos(\omega t-kx)$ (где $k=\omega/v$).
А если нам нужна в точке (x,t) сила тока? Её можно найти по формуле $I(x,t)=U(x,t)/\rho$, где ρ – т.н. волновое сопротивление, измеряется в Омах.

Задачи на длинные линии.

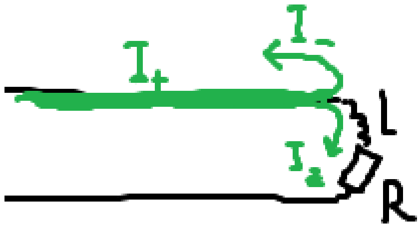
Можно условно разделить на две категории: задачи, где нам нужен только правый конец, и где нам нужны оба.

Начнём с задач, где нам нужен только правый конец.

3. Гармоническая волна напряжения U и частоты ω отражается от конца длинной линии с волновым сопротивлением ρ, нагруженной на последовательно соединенные индуктивность L и сопротивление R. Найти амплитуду напряжения на индуктивности U_L, если $R=4\rho$ и $\omega L=\rho$.

Несмотря на то, что я нарисовал оба конца линии, левый нам особо и не нужен. Главное, что по верхнему проводу текла синусоидальная волна. Что её породило – не важно. Я вот нарисовал источник переменного напряжения, но это может быть что угодно. Главное, чтобы она текла.

Текла, текла и натекла на неоднородность – конец длинной линии. Я привожу такой пример: группа студентов решила сходить погулять вместе. Но в группе нашлись лидеры, жаждущие острых ощущений и ярких впечатлений, которые объявили, что группа идёт в заброшенное здание ну или на какой-то подобный стрёмный объект. Ну, лидеры оказались сталкерами ☺ Естественно, такой вариант развития событий понравился не всем и часть развернулась и пошла назад.



Так и в данном случае ток I_+ делится на два тока: часть разворачивается (это I_-), часть идёт на нагрузку Z (это I_Z).
Исходя из рисунка, видно, что
$I_+=I_-+I_Z$
Nota bene! Вы можете наткнуться на формулу $I_Z=I_-+I_+$. Именно так пишут Вятчанин и Биленко. Но они считают I_- отрицательным! А я считаю положительным. Именно это и обеспечивает разницу в наших формулах. По-моему, с положительными числами работать легче, поэтому я буду писать именно $I_+=I_-+I_Z$.

Доля пошедшего назад ТОКА I_-/I_+ называется коэфом отражения ТОКА, для него есть формула, которую надо выучить: $\frac{\tilde{\rho}-Z}{\tilde{\rho}+Z}$. ρ, напомню – волновое сопротивление длинной линии, её характеристика, зависящая от геометрии сечения проводов. Ну а на Z тогда пойдёт $\frac{2Z}{\rho+Z}I_+$. Именно такой ток будет на катушке. Чтобы найти напряжение на ней, надо будет домножить на импеданс катушки: $U_L=\frac{2Z}{\rho+Z}I_+\cdot i\omega L$.
Нам не дана начальная сила тока, шедшая слева направо I_+, но зато дали U_+ (обозначенное как U) – напряжение той волны. А в длинной линии

напряжение и сила тока связаны волновым сопротивлением, поэтому

$$I_+ = \frac{U_+}{\rho}$$ и $$U_L = \frac{2Z}{\rho+Z}\cdot\frac{U}{\rho}\cdot i\omega L$$.

Осталось подставить $\omega L=\rho$, $Z=R+i\omega L=\rho(4+i)$ и взять модули.

$$U_L = \left|\frac{2(4+i)}{1+4+i}\right| U = 2\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}U$$

3. Гармоническая волна напряжения U и частоты ω отражается от конца длинной линии с волновым сопротивлением ρ, нагруженной на параллельно соединенные индуктивность L и сопротивление R. Найти амплитуду напряжения на индуктивности U_L, если $R=3\rho$ и $\omega L=\rho$.

Здесь уже катушка и резистор подключены параллельно.
Предлагаю для разнообразия решить через коэффициент отражения ***напряжения***. Для него другая формула: $\frac{Z-\tilde{\rho}}{Z+\tilde{\rho}}$.

Кроме того, $U_Z = U_- + U_+$. Какой смысл у этой формулы? Напряжение на нагрузке складывается из напряжений двух волн: бегущей слева направо и справа налево.

Сравните с формулой $I_+=I_-+I_Z$. Видите разницу? Вот не путайте.

Т.к. коэф отражения напряжения $\frac{Z-\tilde{\rho}}{Z+\tilde{\rho}} = U_-/U_+$, то $U_Z = U_+*(1 +$ коэф отражения напряжения$)=$ $$\frac{2Z}{Z+\rho}U_+$$.

Собственно, это почти всё, потому что напряжение на Z равно напряжению на резисторе и напряжению на катушке (ведь они подключены параллельно), а последнее с нас и спрашивают. Осталось всего лишь подставить Z. Это будет

$$Z=\frac{R\cdot i w L}{R+i w L}$$

Но R и wL по условию можно выразить через ρ. Сделаем это:

$$Z=\frac{R\cdot i w L}{R+i w L}=\frac{3\rho\cdot i\rho}{3\rho+i\rho}=\frac{i\cdot 3\rho^2}{(3+i)\rho}=\frac{3i\rho}{3+i}$$

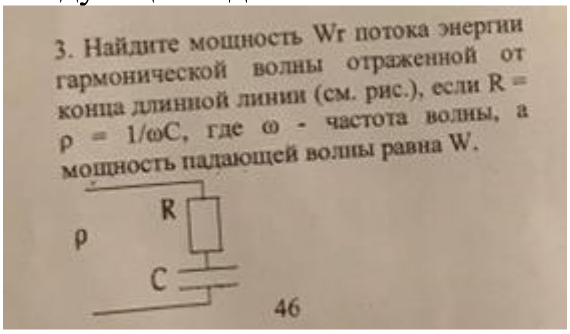
Осталось подставить Z в $\frac{2Z}{Z+\rho}U_+$:

$$\frac{\frac{2\cdot 3i\rho}{3+i}}{\frac{3i\rho}{3+i}+\rho}U_+=6\,\frac{\frac{i}{3+i}}{\frac{3i}{3+i}+1}U_+=6\frac{i}{3i+3+i}U_+=\frac{i\cdot 6}{3+4i}U_+$$

Ро в таких задачах все сокращается. Осталось только взять модуль от коэффициента. Модуль числителя – 6, знаменателя – 5.
Ответ: 6/5*U.

Напомню, что для любой волны в длинной линии в любой точке в любой момент времени U(x,t) прямо пропорционально I(x,t) (коэф пропорциональности – волновое сопротивление ρ), так что то, что коэфы отражения напряжения и тока по модулю совпали, нас отнюдь не удивляет: у отражённой волны ток во столько же раз слабее (по сравнению с током исходной волны), во столько же раз напряжение.

Следующая задача:


3. Найдите мощность Wr потока энергии гармонической волны отраженной от конца длинной линии (см. рис.), если R = ρ = 1/ωC, где ω - частота волны, а мощность падающей волны равна W.

Тут нас спрашивают про мощность на Z. Как вы понимаете, существует ещё и коэффициент отражения мощности:

коэффициент отражения напряжения гармонической волны

$$\tilde{R}_u \equiv \frac{\tilde{U}_r(l)}{\tilde{U}_d(l)} = \frac{Z - \tilde{\rho}}{Z + \tilde{\rho}},$$

коэффициент отражения тока

$$\tilde{R}_i \equiv \frac{\tilde{J}_r(l)}{\tilde{J}_d(l)} = \frac{\tilde{\rho} - Z}{\tilde{\rho} + Z} = -\tilde{R}_u.$$

Коэффициент отражения потока энергии (отражение мощности)

$$R_P = \ |R_u|^2 = |R_i|^2.$$

А для коэфа отражения мощности у нас две равносильных формулы:

$$\left(\frac{Z-\rho}{Z+\rho}\right)^2 \qquad \left(\frac{\rho-Z}{\rho+Z}\right)^2$$

В данной задаче

$$Z = R - \frac{i}{\omega C}$$

Т.к. R и 1/ωC по условию равны ρ, то это перепишем импеданс как

$$Z = \rho - i\rho$$

И подставим его в таком виде в формулу для коэфа отражения мощности

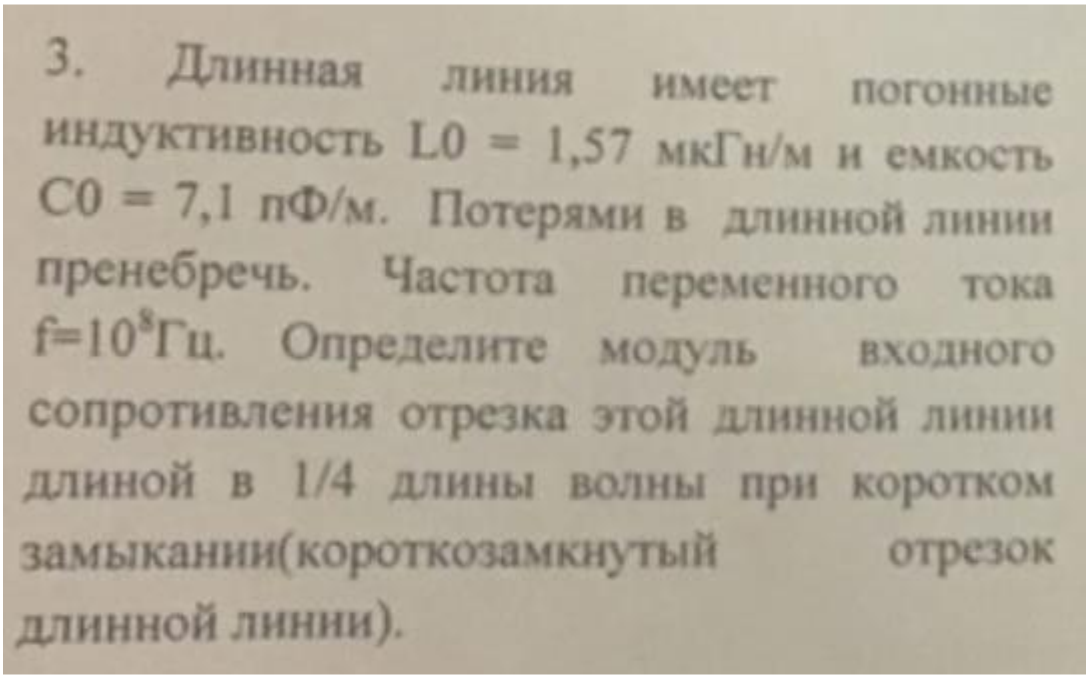
$$\left(\frac{\rho-Z}{\rho+Z}\right)^2$$

:

$$\left(\frac{\rho-(\rho-i\rho)}{\rho+(\rho-i\rho)}\right)^2=\left(\frac{i\rho}{\rho(2-i)}\right)^2=\left[\frac{i}{2-i}\right]^2=\frac{1}{(2-i)^2}=\frac{1}{3-4i}=\frac{3+4i}{5}$$

Вот вам напоследок задача, где нужны оба конца линии:

Вася был радиофизиком-экспериментатором.
У него был
А) источник гармонического напряжения
Б) куча длинных линий в пластике разной длины. На каждом из двух концов торчали два голых провода. Вася всегда одну пару прикладывал к источнику напряжения, а вот со вторым концом длинной линии он мог развлекаться: мог закоротить, мог закоротить уже на нагрузку, мог вообще не соединять там провода, оставить в воздухе.



3. Длинная линия имеет погонные индуктивность L0 = 1,57 мкГн/м и емкость C0 = 7,1 пФ/м. Потерями в длинной линии пренебречь. Частота переменного тока $f=10^8$Гц. Определите модуль входного сопротивления отрезка этой длинной линии длиной в 1/4 длины волны при коротком замыкании(короткозамкнутый отрезок длинной линии).

Однажды Васе вздумалось подсчитать эквивалентный импеданс своей длинной линии. Он подключил её к своему источнику переменного тока и снял зависимость тока на входе от напряжения, которое даёт источник. Получил два синуса, ну и там, глядя на экран осциллографа, нашёл что надо. Т.е. по сути снял ВАХ системы, состоящей из своей длинной линии и нагрузки. Там ВАХ линейная, разве что из-за сдвига фаз импеданс может быть комплексным.

А можно ли это было сделать как иначе? Не проводить эксперимент, а посчитать. К счастью, Вася знал, что были лекции Вятчанина великие, где давались какие-то формулы. Вот он, импеданс длинной линии!

$$Z_{вх} = \frac{1 + k_{отр} e^{-2ikl}}{1 - k_{отр} e^{-2ikl}}\ \rho$$
, где $k_{отр}$ – коэф отражения ***напряжения*** на правом конце. Для него Вася уже знал формулу:

$$k_{отр}(\omega) = \frac{Z_н(\omega) - \rho}{Z_н(\omega) + \rho}$$

Т.к. в данной задаче Вася закоротил правые провода, то $Z_Н$ есть 0 и $k_{отр}$ будет -1. Тогда

$$Z_{вх} = \frac{1 - e^{-2ikl}}{1 + e^{-2ikl}}\ \rho$$
, где k – волновое число.

Но откуда брать k и ρ? Вася повертел свой провод. На нём полустёртыми буквами были написаны погонная индуктивность и ёмкость.

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$k = \frac{\omega}{v_0},\quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Погонная индуктивность и погонная ёмкость (измеряются в Генри/м и Фарад/м) – также характеристики длинной линии. Через них можно выразить остальные.

Ага: ρ мы вычислим, а k зависит от ω – частоты Васиного генератора.

Собственно, импеданс зависит от частоты – это нормально, вот у катушек и конденсаторов он тоже зависит.

Собственно, всё, остались только подстановки.